講義ノート：総合講座（第四回）

細矢祐誉

テーマ：関数の連続性と最大最小原理

・数列の収束についての細かい補足

我々がこの講義で扱う数列の収束については、厳密さを非常に重要視している。このため、たとえばぱっと見には自明であるようなことでも、きちんと証明を与えない限りは信用しない。一例を挙げよう。いま、ふたつの数列 (a_n) と (b_n) があって、$a_n < b_n$ が常に成り立っているとしよう。そして a_n は α に、b_n は β に収束しているとする。このとき $\alpha < \beta$ は言えるだろうか？　答えは、言えない。たとえば

$$a_n = -\frac{1}{n},\ b_n = \frac{1}{n}$$

とすれば $a_n < b_n$ はすべての n に対して成り立つが、$\alpha = \beta = 0$ である。

では、$a_n \le b_n$ が常に成り立っていて (a_n) が α に、(b_n) が β に収束しているとき、$\alpha \le \beta$ であるということは言えるだろうか？　こちらは正しい。実際、正の数 $\varepsilon > 0$ を固定し、N を十分大きく、$n \ge N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ かつ $|b_n - \alpha| < \varepsilon$ となるように取れば、

$$\alpha - \beta = \alpha - a_N + a_N - b_N + b_N - \beta < a_N - b_N + 2\varepsilon \le 2\varepsilon$$

となる。よって $\alpha - \beta < 2\varepsilon$ がすべての正の数 ε に対して言えることになるが、すべての正の数より小さな数は 0 以下なので、$\alpha - \beta \le 0$ がわかる。よって $\alpha \le \beta$ でなければならない。

以下、上と同様の「当たり前に見える」結果をいくつか示しておこう。これらはすべて当たり前に見えるが、この講義の基準に照らし合わせれば、証明が必要である。

定理１：(a_n) は α に収束し、(b_n) は β に収束するとする。このとき、以下が成り立つ。

1. 定数 c に対して $c_n = ca_n$ とすると、(c_n) は $c\alpha$ に収束する。
2. $c_n = a_n + b_n$ とすると、(c_n) は $\alpha + \beta$ に収束する。
3. $c_n = a_n - b_n$ とすると、(c_n) は $\alpha - \beta$ に収束する。
4. $c_n = a_n b_n$ とすると、(c_n) は $\alpha\beta$ に収束する。
5. $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ とする。もし $\beta \neq 0$ ならば、(c_n) は $\frac{\alpha}{\beta}$ に収束する。

証明：1. から示そう。まず、$c=0$ のときには $c_n=0$ が常に成り立つので、これは $0=c\alpha$ に収束する。よって $c\neq 0$ のときだけを考える。$\varepsilon>0$ を取って固定する。仮定から十分大きな N を取れば、$n\geq N$ のとき

$$|a_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{|c|}$$

が成り立つ。このとき、

$$|c_n-c\alpha|=|c||a_n-\alpha|<\varepsilon$$

となるので、たしかに (c_n) は $c\alpha$ に収束していることがわかった。

2. について。$\varepsilon>0$ を取って固定する。仮定から十分大きな N を取れば、$n\geq N$ のとき

$$|a_n-\alpha|<\varepsilon/2,\ |b_n-\beta|<\varepsilon/2$$

となる。よって、そのような n については

$$|c_n-(\alpha+\beta)|\leq|a_n-\alpha|+|b_n-\beta|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

となるため、たしかに (c_n) は $\alpha+\beta$ に収束していることがわかった。

3. については、$-b_n$ は $(-1)\times b_n$ と書けるため、数列 $(-b_n)$ は 1. から $-\beta$ に収束するので、後は 2. を適用するだけである。

4. と 5. を示すには、数列 (c_n) が γ に収束することと、$|c_n-\gamma|$ が 0 に収束することが同値であることを用いる。この証明はほぼ当たり前なので書かない。学生諸君が各自でチェックされたい。

4. について。まず、前回の定理 5 から、収束する数列 (a_n) は有界である。よって、ある M が存在して、すべての n について $|a_n|\leq M$ を満たす。そこで三角不等式を用いることで

$$\begin{aligned}0\leq|c_n-\alpha\beta|&=|a_nb_n-a_n\beta+a_n\beta-\alpha\beta|\\&\leq|a_nb_n-a_n\beta|+|a_n\beta-\alpha\beta|\\&=|a_n||b_n-\beta|+|\beta||a_n-\alpha|\\&\leq M|b_n-\beta|+|\beta||a_n-\alpha|\end{aligned}$$

となるが、一番下の式は 0 に収束するため、はさみうちの原理から $|c_n-\alpha\beta|$ も 0 に収束し、よって (c_n) は $\alpha\beta$ に収束する。

5. について。$\beta\neq 0$ なので、$|\beta|>0$ である。(b_n) は β に収束するから、ある N が存在して、$n\geq N$ ならば

$$|b_n-\beta|<\frac{|\beta|}{2}$$

を満たす。三角不等式から、

$$|\beta| = |\beta - b_n + b_n| \leq |\beta - b_n| + |b_n| \leq \frac{|\beta|}{2} + |b_n|$$

であるため、

$$|b_n| \geq \frac{|\beta|}{2}$$

であることがここからわかる。特にこのような n について $b_n \neq 0$ なので、c_n は $n \geq N$ であれば定義される。そして、

$$\frac{1}{|b_n|} \leq \frac{2}{|\beta|}$$

であるから、三角不等式から $n \geq N$ である限り

$$\begin{aligned}
0 \leq \left| c_n - \frac{\alpha}{\beta} \right| &= \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{\alpha}{\beta} \right| \\
&= \frac{|a_n\beta - \alpha b_n|}{|\beta b_n|} = \frac{|a_n\beta - \alpha\beta + \alpha\beta - \alpha b_n|}{|\beta b_n|} \\
&\leq \frac{|\beta||a_n - \alpha| + |\alpha||\beta - b_n|}{|\beta b_n|} \\
&\leq \frac{2(|\beta||a_n - \alpha| + |\alpha||\beta - b_n|)}{\beta^2} \\
&= \frac{2|a_n - \alpha|}{|\beta|} + \frac{2|\alpha||\beta - b_n|}{\beta^2}
\end{aligned}$$

を得るが、一番下の段は 0 に収束する。よってはさみうちの原理から $|c_n - \alpha/\beta|$ も 0 に収束し、故に (c_n) は $\frac{\alpha}{\beta}$ に収束する。以上で証明が完成した。 ■

・上極限と下極限

しばしば、収束しない数列を扱わないといけない場合がある。この場合に、収束しない数列でも定義できる収束と似た概念があるので、紹介だけしておこう。

(a_n) は数列とする。このとき、$b_n = \sup_{m \geq n} a_m$ と定義する。(b_n) は単調非増加数列であることが簡単にわかるので、収束するか発散するかはともかく、$\lim_{n\to\infty} b_n$ は定義できる。この値のことを数列 (a_n) の**上極限** (limit superior) と呼んで

$$\limsup_{n\to\infty} a_n$$

と書く。

同様に、$c_n = \inf_{m\geq n} a_m$ と定義する。(c_n) は単調非減少数列なので、収束するか発散するかはともかく、$\lim_{n\to\infty} c_n$ は定義できる。これを数列 (a_n) の**下極限** (limit inferior) と呼んで

$$\liminf_{n\to\infty} a_n$$

と書く。

簡単に証明できるが、(a_n) が α に収束することと、

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \alpha \leq \liminf_{n\to\infty} a_n$$

は同値になる。この事実は、収束するかどうかがよくわからない数列 a_n が収束することを証明するために、しばしば有用である。また、上極限や下極限については、定理 1 の性質 1. から 5. はもはや成り立たないことに注意しよう。たとえば $a_n = (-1)^n$ とし、$b_n = (-1)^{n+1}$ とすると、$a_n + b_n = 0$ が常に成り立つ。しかし $\limsup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} b_n = 1$ なので、

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0 < 2 = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

となって、2. は $\limsup$ については成り立たないことがわかる。

・関数の極限

さて、関数 $f : A \to B$ について考えよう。この記号の意味はすでに二回前の講義ノートで述べた。ここでは B が $\mathbb{R}$ であるような関数、いわゆる**実数値関数**の話をする。

たいていの学生諸君が思い浮かべる関数は実数値関数であろう。後の講義でいろいろな実数値関数に触れるが、そこで議論されるのは x^2 や $1/x$、$\sqrt{x}$ や $\log x$ などである。しかし、これらの関数について、定義域 A は共通ではない。x^2 はあらゆる実数を入れてよい関数なので、$A = \mathbb{R}$ である。しかし $1/x$ には 0 を入れてはいけない。したがって A は $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$ である。このような集合は $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ と書かれる[*1]。$\sqrt{x}$ は、負の実数を入れてはいけないことになっている。したがって $\sqrt{x}$ の定義域は $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ である。この集合は経済学では慣例上、$\mathbb{R}_+$ と書かれる。$\log x$ は、x に対して、$e^y = x$ という方程式の解 y を返す関数である。明らかに x が正でないと方程式に解がないので、x には正の数しか入れられない。よってこの場合、$\log x$ の定義域は $\{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ である。この集合は経済学では慣例上、$\mathbb{R}_{++}$ と書かれる。

[*1] 一般に、集合 A に含まれるが B には含まれないものをすべて集めてできた集合を $A \setminus B$ と書く。

さて、以上の準備を元に、実数値関数 $f : U \to \mathbb{R}$ を考えよう。そして、x という数は U の中にあるか、端にあるかのどちらかであるとする[*2]。いま、$U \setminus \{x\}$ 内の数列 (a_n) で x に収束するものを取ってきて、

$$b_n = f(a_n)$$

として数列 (b_n) を新たに定義する。このとき、この (a_n) をどう取っても (b_n) が α に収束するならば、関数 $f(x)$ は $y \to x$ のときに α に収束すると言い、

$$\lim_{y \to x} f(y) = \alpha$$

と書く。

例として、$f(x) = x \sin(1/x)$ を挙げよう。この関数の定義域は $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ である。そして、(a_n) を、$a_n \neq 0$ が常に成り立ち、かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となる数列とする。このとき、$|\sin(1/x)| \le 1$ だから

$$|f(a_n)| \le |a_n|$$

であり、よって数列 $(f(a_n))$ は 0 に収束する。故に、

$$\lim_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0$$

であることがわかった。

なお、U が半直線 $[a, +\infty)$ だったりする場合には、x の代わりに $+\infty$ を使って、

$$\lim_{y \to +\infty} f(y)$$

という概念を議論することも可能である。が、今回は詳細を省略する。

・関数の連続性

実数値関数 $f : A \to \mathbb{R}$ を考え、ただし A は $\mathbb{R}$ の部分集合とする。$x \in A$ のとき、f が x で**連続** (continuous) であるとは、

$$\lim_{y \to x} f(y) = f(x)$$

が成り立つことを言う。すべての $x \in A$ で連続な関数は、単に連続な関数であると言われる。

---

*2 「端にある」という言葉があいまいに聞こえるかもしれないが、これの厳密な定義はもう少し後の講義ノートに回す。

一見して当たり前のように見える上の定義だが、第一回の講義ノートと比較すると、少し奇妙に思った学生もいるかもしれない。というのも、第一回の講義ノートでは、

$$\forall x,\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \text{ s.t. } |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

という論理式を「連続性」の定義として紹介したからである。しかし、これは上の連続性の定義と同値なのである。まずは次の定理を示そう。

定理２：関数 $f : A \to \mathbb{R}$ について、以下のふたつは同値である。

(i) $\lim_{y\to x} f(y) = \alpha$ となる。

(ii) 以下の論理式が成り立つ。

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \text{ s.t. } \forall y \in A,\ 0 < |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - \alpha| < \varepsilon. \tag{1}$$

証明：いつもやっているように、同値性の証明はふたつに分解した方が証明しやすい。今回も、主張を「(i) が成り立てば (ii) が成り立つ」と「(ii) が成り立てば (i) が成り立つ」のふたつに分解しよう。

まず「(ii) が成り立てば (i) が成り立つ」ことを示そう。まず、(a_n) は $a_n \neq x$ を常に満たす数列で、しかも x に収束するとする。そして、$b_n = f(a_n)$ と定義しよう。証明したいことは $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ であることである。これを論理式で書くと、

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow |f(a_n) - \alpha| < \varepsilon$$

が、我々の証明の目標である。

そこで、まずは $\varepsilon > 0$ を取って固定しよう。(ii) が仮定されているので、この ε に対してある $\delta > 0$ が存在して、$0 < |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ。一方、(a_n) は x に収束するので、この δ に対してある N が存在して、$n \geq N$ であれば $|a_n - x| < \delta$ である。また、$a_n \neq x$ が仮定されているので $|a_n - x| > 0$ であり、よって、$n \geq N$ のときには、$|f(a_n) - \alpha| < \varepsilon$ でなければばならない。これでこちらの証明は完成する。

後は「(i) が成り立てば (ii) が成り立つ」ことを示せば証明が完成する。今回は**対偶法**という証明法を用いる。論理学で知られるように、「AならばB」と「BでないならばAでない」は同値である。したがって、「(ii) が成り立たないならば (i) も成り立たない」ということを示せば、この部分の証明が終わることになる。

ところで「(ii) が成り立たない」というのはどういう主張であろうか。実は述語論理の式は、機械的に否定を取れる。つまり、論理式に次の操作を行うと自動的に否定命題にな

る。1）「∀」を「∃」に置き換える。2）「∃」を「∀」に置き換える。3）最後の式を否定命題に書き換える。したがって、(1) 式の否定は以下の形になる[*3]。

$$\exists\varepsilon > 0 \text{ s.t. } \forall\delta > 0,\ \exists y \in A \text{ s.t. } 0 < |y-x| < \delta \text{ and } |f(y)-\alpha| \geq \varepsilon. \tag{2}$$

さて、$\delta = \frac{1}{n}$ とセットしよう。上の (2) 式から、ある y が存在して、$0 < |y-x| < \delta$ であるにもかかわらず $|f(y)-\alpha| \geq \varepsilon$ である。この y を a_n と定義しよう。$|a_n - x| > 0$ なので $a_n \neq x$ であり、さらに $0 < |a_n - x| < \frac{1}{n}$ なのだから、$\lim_{n\to\infty} a_n = x$ である。しかし、

$$|f(a_n)-\alpha| \geq \varepsilon$$

が常に成り立っているので、$f(a_n)$ は α に収束しない。よって (i) は成り立たない。以上で証明が完成した。■

この定理を用いることで、以下の結果が示せる[*4]。

定理３：関数 $f : A \to \mathbb{R}$ について、以下のふたつは同値である。

(i) 関数 f は $x \in A$ で連続である。

(ii) 以下の論理式が成り立つ。

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \text{ s.t. } \forall y \in A,\ |y-x| < \delta \Rightarrow |f(y)-f(x)| < \varepsilon.$$

(iii) $x \in A$ に収束する A 上の任意の数列 (a_n) に対して、$b_n = f(a_n)$ とすると (b_n) は $f(x)$ に収束する。

証明：(ii) が成り立つとする。(a_n) が A 上の数列で x に収束しているとし、$b_n = f(a_n)$ とする。$\varepsilon > 0$ を任意に取り、これに対して (ii) で存在が保証された $\delta > 0$ を取る。(a_n) は x に収束しているので、ある N が存在して、$n \geq N$ ならば $|a_n - x| < \delta$ であり、よって $|b_n - f(x)| < \varepsilon$ である。これは (b_n) が $f(x)$ に収束していることを意味するため、(iii) が成り立つ。

(iii) が成り立てば $\lim_{y\to x} f(y) = f(x)$ の条件が満たされるため、(i) が成り立つ。

[*3] 述語論理を用いたかった最大の理由は、このように否定命題を取ることが比較的容易だからである。述語論理ではなく言葉で考えている場合、(ii) の否定命題を正確に理解することはなかなかに難しい。しかし論理式で書いていることによって、それがとても簡単になるのである。

[*4] この定理は、関数の連続性を証明するときには、わざわざ $0 < |y-x| < \delta$ とか、$a_n \neq x$ のように、「x の可能性を除外する」必要はないという意味を含む。

(i) が成り立つとしよう。定理２から、$\alpha = f(x)$ に対して (1) が成り立つ。ここで $\varepsilon > 0$ を任意に取り、(1) で存在が保証された $\delta > 0$ を取る。$y \in A$ かつ $|y - x| < \delta$ であるとしよう。$y = x$ ならば、$f(y) = f(x)$ なので、$|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ である。一方、$y \neq x$ ならば $0 < |y - x|$ なので、(1) から $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ である。以上で、どちらの場合でも $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ であることがわかったので、(ii) が成り立つことがわかった。以上で証明が完成した。 ■

こうして、第一回講義ノートで我々が提示した論理式は、たしかに関数の連続性を示していることがわかった。また、数列を用いて我々が関数の極限を定義したことにより、定理１から、ただちに関数の極限についての性質をいくつも得られる。たとえば $f(x)$ と $g(x)$ が連続なとき、$f(x) + g(x)$ や $f(x) - g(x)$、$f(x)g(x)$ や $\frac{f(x)}{g(x)}$ はすべて連続である。特に、$f(x) = x$ という関数は、$\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \varepsilon$ とすれば簡単に連続であることが示せるため、これをかけ算した $x^2 = x \times x$ や $x^3 = x^2 \times x$、あるいは逆数を取った x^{-1} や $x^{-2} = x^{-1} \times x^{-1}$ は連続であることがすぐにわかる。したがってそれらの足し算である多項式なども連続である。一方、$\sqrt{x}$ などの連続性はそれほど簡単ではないが、それは今回は少し置いておこう。

・応用：最大最小原理

連続性の応用として、最大化問題への適用を挙げておこう。最大化問題は、以下のような文章で出題されるものである。

「○○という条件の下で、$f(x)$ が最大になるような x を見つけなさい。」

上の文章は長いので、しばしば下のように略記される。

$$\begin{array}{ll} \max & f(x) \\ \text{subject to.} & \text{○○} \end{array}$$

ここで「最大」という言葉が「最小」に入れ替わった場合は「最小化問題」と言い、その場合は上の略記も max の代わりに min を用いる。この問題の解答となる点 x^* は問題の**解** (solution) あるいは**最大点**と呼ばれる。解 x^* は、○○という条件を満たしており、また他の○○という条件を満たすすべての点 x に対しても $f(x^*) \geq f(x)$ であるような点、として特定される[*5]。

[*5] 解が複数ある可能性もあることに注意。また、最大点と最大値を混同しないように。最大点 x^* と最大値

実は最大化問題と最小化問題は大差がない。なぜなら、$f(x)$ を最大化する問題は、$-f(x)$ を最小化する問題だからである。したがってどちらか片方を議論すればもう片方も議論できてしまう。物理などではエネルギーの最小化などが重要であるから、最小化問題が重視される。しかし、経済学では利潤最大化などが主に扱われるので、最大化問題の方が重視される。

さて、以下の問題を考えよう。

$$\begin{aligned} &\max && f(x) \\ &\text{subject to.} && x \in A \end{aligned} \tag{3}$$

ただし、集合 A は f の定義域の部分集合であるとする。このとき、以下の定理が成り立つ。

定理４：もし集合 A がコンパクトで、関数 f が A 内のすべての点で連続であれば、問題 (3) は少なくとも一つは解を持つ。

証明：まず、証明のために以下の補題を示そう。

補題１：B が実数のコンパクト集合だとすると、B には最大の数が存在する。

補題の証明：まず、B の上界 U_B が非空であることを背理法で示そう。U_B が空集合であると仮定すると、任意の自然数 n が U_B に入らないため、$a_n > n$ となる $a_n \in B$ が存在する。数列 (a_n) はコンパクト集合 B 上の数列なので、収束部分列 $(a_{k(n)})$ が存在する。しかし一方、$a_{k(n)} > k(n) \geq n$ なので、$(a_{k(n)})$ は有界数列ではなく、これは前回の講義ノートの定理５に矛盾する。よって B は上に有界である。

そこで $\sup B = s^*$ としよう。すると、$s^* - \frac{1}{n}$ は B の上界ではないので、$s^* - \frac{1}{n} < b_n \leq s^*$ となる数 $b_n \in B$ が存在する。はさみうちの原理から数列 (b_n) は s^* に収束する。一方、B はコンパクト集合なので、(b_n) は B 内の数 b^* への収束部分列 $(b_{k(n)})$ を持つが、明らかに $(b_{k(n)})$ は s^* に収束しているため、収束先の一意性から、$s^* = b^*$ でなければならない。よって $s^* \in B$ である。つまり、s^* は B に所属する B の上界であるため、B の最大数でなければならない。以上で証明が完成した。 ■

さて、定理４の証明に戻ろう。

$$B = \{y \in \mathbb{R} | \exists x \in A \text{ s.t. } y = f(x)\}$$

$f(x^*)$ は別物である。

と定義する。B がコンパクトであれば、B には最大数 y^* が存在し、$y^* = f(x^*)$ となる x^* が問題 (3) の解である。よって、B がコンパクトであることを示すのが証明の目標である。いま、(b_n) を B 内の数列とする。B の定義から、$b_n = f(a_n)$ となる数 $a_n \in A$ が存在する。数列 (a_n) はコンパクト集合である A 上の数列なので、A の要素 a^* への収束部分列 $(a_{k(n)})$ を持つ。このとき、f は a^* で連続であるため、$(b_{k(n)})$ は $f(a^*) \in B$ に収束する。よって、たしかに (b_n) は B の要素への収束部分列を持つため、B はコンパクトである。以上で証明が完成した。 ■

以下、連続性とコンパクト性が最大点の存在にとって極めて重要であることを示すために、いくつか例を示そう。

例１：$f(x) = x^2$ とし、$A = \mathbb{R}_+$ とする。f は連続だが、A はどんな部分列も収束しない数列 $a_n = n$ を含むので、コンパクトではない。この場合、$x \in A$ を大きく取れば取るほど $f(x)$ も大きくなるため、(3) の最大点は存在しない。

例２：$f(x) = x^2$ とし、$A = \{x \in \mathbb{R} | 0 \le x < 1\}$ とする。このような A は普通、$[0, 1)$ と書かれる。この場合、$a_n = 1 - \frac{1}{n}$ とすると、(a_n) は A 上の数列であり、1 に収束するため、その部分列もすべて 1 に収束する。しかし $1 \notin A$ なので、A はコンパクトではない。やはりこの場合も、x を 1 に近づければ近づけるほど $f(x)$ の値は大きくなるが、1 自体は選べないため、(3) の最大点は存在しない。

例３：$A = [0, 2]$ とし、

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x < 1, \\ 0 & \text{if } x \ge 1 \end{cases}$$

とする。A はボルツァーノ＝ワイヤストラスの定理からコンパクトであるが、f が連続ではない。この場合、x が 1 より小さく、かつ 1 に近づけば近づくほど $f(x)$ は大きくなるが、1 のところですとんと 0 に落ちてしまうため、やはり (3) の最大点は存在しない。

例１は A が有界でない場合、例２は A が閉集合でない場合、例３は f が連続でない場合である。後でコンパクト集合の特徴付けを厳密に行うが、実は実数の部分集合 A については、これがコンパクトであることと、有界な閉集合であることは同値であることが知られている。よって、(3) に解が存在しないケースはこれらの例で尽きていて、他の場合は必ず解が存在するというのが、定理３のメッセージである。

・微分とフェルマーの原理

定理４を用いることで、我々は最大点を求めるための最も基本的な手法である、いわゆるフェルマーの原理に触れることができる。フェルマーの原理は**最大化の一階の条件**とも呼ばれ、「最大点では微分が 0 になる」と略記される。しかし、実はこの原理はもう少し慎重に議論する必要がある。

まず、微分を定義しよう。関数 f が次の関係

$$\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\alpha$$

を持つとき、この f は x で**微分可能** (differentiable) であると言い、数 α を f の**微分の値** (derivative) と呼んで $f'(x)$ で表す。lim という言葉の定義は、いまでは曖昧さはなくなっていることに注意しよう。これを用いて、次の定理を示す。

定理５：$a<b$ とし、$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は連続であると仮定する。問題

$$\begin{aligned}&\max && f(x)\\&\text{subject to.} && a\le x\le b\end{aligned}\tag{4}$$

を考える。このとき、この問題には解が少なくともひとつは存在する。また、x^* が問題 (4) の解であれば、以下のうちどれかひとつだけが成り立つ。

1) 関数 f は x^* で微分できない。
2) $x^*=a$ で、$f'(x^*)\le 0$ となる。
3) $x^*=b$ で、$f'(x^*)\ge 0$ となる。
4) $a<x^*<b$ で、$f'(x^*)=0$ となる。

証明：まず、$a\le x\le b$ という条件は $x\in[a,b]$ と書き換えられる。集合 $[a,b]$ はボルツァーノ＝ワイヤストラスの定理からコンパクトなので、定理３から、問題 (4) には解が少なくともひとつは存在する。

以下、x^* が解であるとし、1) ではない、つまり $f'(x^*)$ は存在すると仮定しよう。以下、場合分けをする。$x^*=a$ の場合には、$x_n=a+(b-a)/n$ と定義すると、(x_n) は $[a,b]$ 内の数列で、a に収束する。このとき、x^* は f の最大点だから、

$$\frac{f(x_n)-f(x^*)}{x_n-x^*}\le 0$$

がすべての n について成り立つ。よって $n \to \infty$ として極限を取れば、

$$f'(x^*) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x^*)}{x_n - x^*} \leq 0$$

となって、2) が示せる。$x^* = b$ の場合には $x_n = b - (b-a)/n$ として同じ議論をすれば $f'(x^*) \geq 0$ となって 3) が示せる。よって残るは $a < x^* < b$ の場合である。この場合は、$x_n = x^* + (b - x^*)/n$ と、また $y_n = x^* - (x^* - a)/n$ と定義すると、

$$\frac{f(x_n) - f(x^*)}{x_n - x^*} \leq 0,\ \frac{f(y_n) - f(x^*)}{y_n - x^*} \geq 0$$

がすべての n について成り立つので、やはり極限を取れば

$$f'(x^*) \leq 0,\ f'(x^*) \geq 0$$

が示せるため、$f'(x^*) = 0$ しかあり得ない。以上で証明が完成した。 ■

いくつか例を示そう。

例4：$f(x) = x^2$ で、$A = [0, 1]$ の場合。この場合、最大点は明らかに $x^* = 1$ である。一方、高校で習った微積分の公式から $f'(x) = 2x$ なので、$f'(x^*) = 2$ となる。これは定理４の 3) のケースに該当する。なお、$f'(x) = 2x$ なので $x = 0$ のとき $f'(x) = 0$ となるが、この 0 という点は (4) の解ではない。つまり、「微分して 0 になるところ」という考えだけで解こうとするとこの問題は間違った解答を得てしまうことになる。

例5：$f(x) = -|x|$ で、$A = [-1, 1]$ の場合。この場合、最大点は明らかに $x^* = 0$ であるが、この点で $f(x)$ は微分できない。これは定理４の 1) のケースに該当する。

例6：$a > 0$ として、$f(x) = -x^2 + ax + b$ で、$A = [0, a]$ の場合。よく知られている平方完成の公式

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}$$

を $\alpha = -1,\ \beta = a,\ \gamma = b$ として適用すると、

$$f(x) = -(x - a/2)^2 + b + a^2/4$$

を得る。したがって $x^* = \frac{a}{2}$ が最大点になる。一方、$f'(x) = -2x + a$ なので、$f'(x^*) = 0$ であることがわかる。これは定理４の 4) のケースに該当する。

・先週の課題の解説

まず、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の部分和 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ を s_n と、また $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ の部分和 $\sum_{i=1}^{n} |a_i|$ を t_n と書くことにする。$m > n$ とすると

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_m| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + ... + |a_m| = |t_m - t_n|$$

なので、(t_n) がコーシー列ならば (s_n) はコーシー列であり、よって絶対収束する級数は収束することがわかる。次に、逆が成り立たない例を見よう。以下の級数を考える。

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}. \tag{5}$$

これは、

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$$

と書かれる級数である。n が偶数のとき、

$$s_{n+2} = s_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = s_{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

なので、

$$s_n < s_{n+2} < s_{n+1}$$

である。同様に n が奇数のとき、

$$s_{n+2} = s_n - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = s_{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

なので、

$$s_n > s_{n+2} > s_{n+1}$$

である。よって (s_n) の部分列 (s_{2n}) は s_1 を決して超えない単調非減少数列なので収束する。その収束先を s^* と置く。ここで $\varepsilon > 0$ を取って固定する。すると、ある N_0 が存在して、$n \geq N_0$ ならば

$$|s_{2n} - s^*| < \varepsilon/2$$

である。一方、アルキメデスの原理から、$N_1 > 2/\varepsilon$ となる N_1 が存在する。N を N_0 と N_1 の大きい方としよう。$n \geq N$ ならば $\frac{1}{2n+1} < \varepsilon/2$ なので、

$$|s_{2n+1} - s^*| \leq |s_{2n+1} - s_{2n}| + |s_{2n} - s^*| = \left|\frac{1}{2n+1}\right| + |s_{2n} - s^*| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

となる。よって結論としては、$n \geq 2N$ ならば

$$|s_n - s^*| < \varepsilon$$

が必ず成り立つことがわかったため、級数 (5) は s^* に収束する[*6]。一方、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{6}$$

を考えよう。こちらは

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$$

と書かれる級数であるが、容易にわかるように

$$|s_{2n} - s_n| = \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

となるため、(s_n) がコーシー列ではない。$a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ と置くと (5) は $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と、(6) は $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ と書けるので、(5) は絶対収束しないが収束する級数の例になっている。

以上から、絶対収束はただの収束よりも強い性質であることがわかった。一般に、絶対収束しないが収束する級数は**条件収束**すると言われるが、条件収束級数は様々なやっかいな性質を持っていることがわかっている。高木貞治『解析概論』の第一章を参照のこと。

・今週の課題

この講義ノートの最初に、我々は数列の収束と四則演算の関係 1. から 4. を導出した。しかし、その際に我々は、(a_n) と (b_n) が収束する、という仮定をしていた。今回は、(a_n) だけ収束することを仮定する。上極限や下極限について、定理 1 の 1. から 5. までの性質はどこまで言えるだろうか？　少し考えてみよう。

[*6] 実は $s^* = \log 2$ であることが知られている。