

テーマ：微分方程式の解の存在定理とその応用

この章では一階の正規形常微分方程式

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t^*) = x^* \quad (1)$$

の局所解の存在定理について扱う。ただし  $t$  は実数であり、また  $x$  は  $n$  次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  の元である。このタイプの方程式は応用が幅広く、たとえば二階以上の方程式をこの形に帰着して解く方法などについては多くの教科書に記されている通りである。

特に断りのない限り、関数  $f$  は  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  上の連結な開集合  $U$  の上で定義され、変数  $(t, x)$  について連続であるとする。ここでこの講義ノート特有の用語をひとつ導入しよう。 $f$  が局所的に  $x$  についてリプシッツであるとは、任意の  $(t, x)$  についてある  $\varepsilon > 0$  と  $L > 0$  が存在して、 $|t' - t| \leq \varepsilon$  かつ  $\|x_1 - x\| \leq \varepsilon, \|x_2 - x\| \leq \varepsilon$  であれば常に、

$$\|f(t', x_1) - f(t', x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

であることを指す。ただし  $\|\cdot\|$  はユークリッドノルムであり、つまり

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

である。

(1) で  $f$  が局所的に  $x$  についてリプシッツであるような問題を第一種の問題、そうでない問題を第二種の問題と呼ぼう。第一種の問題と第二種の問題では、解の存在定理に用いる数学の定理が異なり、したがって解の持つ性質が大きく異なる。どちらの場合でも解は存在するが、解がひとつしかないという性質、いわゆる一意性 (uniqueness) を出せるのは第一種の問題のみである。

・準備

さて、ところで (1) の両辺を、 $t^*$  から  $t$  まで積分してみよう。左辺は微分積分学の基本定理から

$$x(t) - x(t^*) = x(t) - x^*$$

とならねばならない。一方で右辺は単純に

$$\int_{t^*}^t f(s, x(s)) ds$$

である。したがって (1) の解は、

$$x(t) = x^* + \int_{t^*}^t f(s, x(s)) ds \quad (2)$$

という関係をすべての  $t$  について満たすことになる。

逆に (2) の関係が常に成り立つような、 $t^*$  を含む区間  $I$  上で定義された関数  $x$  が見つかったとしよう。このとき、両辺を  $t$  で微分すれば、やはり微分積分学の基本定理から

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

がすべての  $t$  について成り立つはずである。さらに  $t = t^*$  とすれば  $x(t^*) = x^*$  もただちにわかる。つまり (1) の解とは (2) を満たす関数であり、逆も同様に成り立つ。

もう少し視野を広げてみよう。前回、関数について詳しく扱った。関数とは、「なにかを入れるとなにかが出てくる規則」のことであった。そしてその入れてよい「なにか」は、関数自体でもよいのであった。そこで、

$$F(x(\cdot))(t) = x^* + \int_{t^*}^t f(s, x(s)) ds$$

という式によって、関数  $x(\cdot)$  に対して関数  $F(x(\cdot))(\cdot)$  を返す「関数」 $F$  が定義できることになる。ただし、ややこしいので、この  $F$  は作用素 (operator) という別の用語を与えよう。つまり  $F$  は関数を入れると関数を返す作用素であり、それは上の式で与えられる。

上の式の意味を受講者諸氏はきちんと理解してもらいたい。左辺は、 $F$  という作用素に関数  $x(\cdot)$  を入れて出てきた関数の、 $t$  という点における値という意味であり、その具体的な内容が右辺である。

ところで先ほどの議論、特に (2) 式を思いだそう。関数  $x(\cdot)$  が (1) の解であるとき、 $x(\cdot)$  は (2)、つまり  $F(x(\cdot)) = x(\cdot)$  という関係を満たす。逆に  $F(x(\cdot)) = x(\cdot)$  ならば  $x(\cdot)$  は (2) を満たすのだから、(1) の解でなければならない。こうして、(1) の解を見つける作業は、 $F(x(\cdot)) = x(\cdot)$  という式を満たす  $x(\cdot)$  を見つける作業へと変換された。

一般に、 $F(x) = x$  を満たす点  $x$  を関数  $F$  の不動点 (fixed point) と呼ぶ。したがって (1) の解を見つける作業は、 $F$  の不動点を見つける作業に帰着したのである。というわけで、後は不動点の存在を保証する数学の定理を適用すれば解の存在が示せる。数学においてそのような定理はすべて、不動点定理と呼ばれる。

・縮小写像の不動点定理

というわけで、(1)の解の存在は不動点の存在問題に帰着されたわけである。では不動点定理として今回の問題に使える定理はなにがあるだろうか？ 後で詳しく述べるが、第一種の問題に使える不動点定理は「縮小写像の不動点定理」と呼ばれるものである。それに対して第二種の問題に使える不動点定理は「シャウダーの不動点定理」と呼ばれるものである。この、不動点定理の違いが、解の性質に差をもたらすことになる。

まず縮小写像の不動点定理の正式な主張を述べよう\*1。

**定理 1 (縮小写像の不動点定理)** :  $f : X \rightarrow X$  とし、ただし  $X$  は完備距離空間であり、 $\rho$  はその距離であるとする。また  $f$  は縮小的、つまりある  $\alpha \in ]0, 1[$  が存在して、どんな  $x, y \in X$  に対しても、

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha \rho(x, y)$$

が成り立つとする。このとき  $f$  には不動点が存在し、しかもそれはただひとつに定まる。さらに、任意の  $x$  に対して  $x_0 = x$  とし、 $x_{n+1} = f(x_n)$  として逐次的に  $(x_n)$  という点列を作ると、これは必ず不動点に収束する。

完備な距離空間の定義は前の章にあった。いまここでもう一度思いだそう。 $X$  上の距離  $\rho$  とは、 $X \times X$  から  $\mathbb{R}$  への関数であって、

- (I)  $\rho(x, y) \geq 0$  が常に成り立ち、また  $\rho(x, y) = 0$  と  $x = y$  は同値である。
- (II)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  が常に成り立つ。
- (III)  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$  が常に成り立つ。

という3条件を満たすものである。そして  $X$  が完備 (complete) であるとは、すべてのコーシー列が収束することを言うのであった。前の章で、実数  $\mathbb{R}$  が完備であることを述べた。そこから、 $\mathbb{R}^n$  が完備であることを証明することはとてもたやすい。しかしもっともっと多くの空間が完備距離空間であり、それがこの定理の使いやすさを増している。縮小的な写像はあまり多くないにもかかわらず、この定理はとても強力なのである。

**定理 1 の証明** : まず、 $x \in X$  をなんでもよいので取る。次に、定理の主張にあるように、 $x_0 = x$  とし、 $x_n$  まで定義されたとき、 $x_{n+1} = f(x_n)$  として  $x_{n+1}$  を逐次的に定義する。まず点列  $(x_n)$  がコーシー列であることを示そう。そのためにはまず、 $f$  が縮小的である

---

\*1 なお、写像 (mapping) は関数と同じ意味だと思ってよい。

という仮定から

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n \rho(x_0, x_1)$$

であることに注意すれば、 $m = n + k > n$  であるとき、

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho(x_n, x_m) &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + \rho(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \\ &\leq \alpha^n \rho(x_0, x_1) + \alpha^{n+1} \rho(x_0, x_1) + \dots + \alpha^{n+k-1} \rho(x_0, x_1) \\ &\leq \alpha^n \rho(x_0, x_1) (1 + \alpha + \dots + \alpha^{k-1}) \\ &\leq \alpha^n \rho(x_0, x_1) \frac{1 - \alpha^k}{1 - \alpha} \\ &\leq \alpha^n \rho(x_0, x_1) \frac{1}{1 - \alpha} \\ &\rightarrow 0 \text{ (as } n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となって、確かに示される。よって  $x_n \rightarrow x^*$  となる点  $x^*$  が存在する。つまり、

$$\rho(x_n, x^*) \rightarrow 0 \text{ (as } n \rightarrow \infty)$$

である。

次に、点列  $f(x_n) \rightarrow f(x^*)$  であることを示そう。実際、これは

$$\rho(f(x_n), f(x^*)) \leq \alpha \rho(x_n, x^*) \rightarrow 0$$

であるからすぐにわかる\*2。ところが一方で  $f(x_n) = x_{n+1}$  だから、 $f(x_n)$  は  $x^*$  にも収束している。距離空間において点列の収束先はひとつしかないから、 $x^* = f(x^*)$  であり、 $x^*$  が不動点であることがわかった。

最後に、不動点がひとつしかないことを示そう。 $y^*$  も不動点だとすると、

$$\rho(x^*, y^*) = \rho(f(x^*), f(y^*)) \leq \alpha \rho(x^*, y^*)$$

である。よって  $(1 - \alpha)\rho(x^*, y^*) \leq 0$  であるが、 $1 - \alpha > 0$  なので、 $\rho(x^*, y^*) = 0$  でなければならない。よって  $x^* = y^*$  である。以上で証明が完成した。 ■

#### ・ 第一種の問題の解の存在定理

さて、では縮小写像の不動点定理を用いて、第一種の問題の解の存在と一意性の定理を示そう。証明の本質は、 $F^1(x(\cdot)) = F(x(\cdot))$  として、 $F^{k+1}(x(\cdot)) = F(F^k(x(\cdot)))$  という形で逐次的に  $F^k$  というのを作っていくときに、十分大きな  $k$  に対して  $F^k$  が縮小写像

---

\*2 簡単にわかるが、縮小的な関数は常に連続である。

になるという事実である。これによって  $F^k$  の不動点の存在を言い、それからさかのぼって  $F$  自身の不動点の存在を言うのである。

最初に主張をきちんと書いておこう。

定理 2 (第一種の問題の解の存在と一意性) : 問題

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t^*) = x^*$$

を考え、ただし  $f$  は  $(t^*, x^*)$  を含む開集合  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$  上で定義された連続関数で、さらに局所的に  $x$  についてリプシッツであるとする。このとき、上の問題の、 $t^*$  を内部に含む区間  $I$  における解が存在する。さらに、そのような解がふたつ存在したとすれば、それらは定義域の共通部分上で一致する。

証明 : まず、 $(t^*, x^*)$  に対して、 $f$  の  $x$  についてのリプシッツ性から、対応する  $\varepsilon > 0$  と  $L$  を取る。つまり、 $|t - t^*| \leq \varepsilon$  で、かつ  $\|x_1 - x^*\| \leq \varepsilon, \|x_2 - x^*\| \leq \varepsilon$  であれば、

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

である。ここでさらに、

$$M = 1 + \max_{(t,x):|t-t^*|\leq\varepsilon,\|x-x^*\|\leq\varepsilon} \|f(t,x)\|$$

という数を定義しておき、そして

$$\delta = \varepsilon/M$$

として、 $I = [t^* - \delta, t^* + \delta]$  という区間と、その上で定義され  $\mathbb{R}^n$  に値を取り、常に  $\|x(t) - x^*\| \leq \varepsilon$  を満たす連続関数の集合として  $X$  を取る。また  $X$  には一様収束の距離

$$\rho(x(\cdot), y(\cdot)) = \max_{t \in I} \|x(t) - y(t)\|$$

を与える。

この  $X$  上で先ほど述べたように  $F^k$  なる作用素に縮小写像の不動点定理を適用する、というのが証明の方針、なのだが、いろいろ確認しなければならない。まずなによりも、 $X$  自身が距離空間だというのは (上の距離が条件 (I)(II)(III) を満たすのは簡単にわかるので) よいとして、完備であると言えるだろうか? それから、 $F^k$  が定理の要件を満たすためには、まずなによりも  $x(\cdot) \in X$  であれば  $F(x(\cdot)) \in X$  でなければ困る。そのあたりから地道に確かめていこう。

まず  $F$  の完備性について。いま、 $(x_k(\cdot))$  が  $X$  上のコーシー列であるとしよう。 $t \in I$  をひとつ取って固定する。 $(x_k(\cdot))$  はコーシー列だから、どんな  $\varepsilon > 0$  に対しても、ある  $N$  が存在して、もし  $k, m \geq N$  ならば

$$\|x_k(t) - x_m(t)\| \leq \rho(x_k(\cdot), x_m(\cdot)) < \varepsilon$$

が成り立つ。よって  $(x_k(t))$  は  $\mathbb{R}^n$  上のコーシー列である。先ほど述べたように  $\mathbb{R}^n$  は完備なので、したがってこの数列は収束先  $x(t)$  を持つ。 $t$  はなんでもよかったので、まず収束先の候補として、関数  $x(\cdot)$  の存在は示せた（連続性はあとで示す）。

任意の  $t \in I$  について、数列  $(x_k(t))$  は閉集合  $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x^*\| \leq \varepsilon\}$  内を常に動くので\*<sup>3</sup>、 $x(t)$  もこの集合に属し、よって  $\|x(t) - x^*\| \leq \varepsilon$  である。次に、上で取ったように任意の  $\varepsilon > 0$  に対しても対応する  $N$  を取って、 $k, m \geq N$  ならば

$$\rho(x_k(\cdot), x_m(\cdot)) < \varepsilon/3$$

であるようにできる。よって特に  $k \geq N$  ならば任意の  $t \in I$  に対して、

$$\|x_k(t) - x(t)\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_k(t) - x_m(t)\| \leq \varepsilon/3$$

であり、故に

$$\rho(x_k(\cdot), x(\cdot)) \leq \varepsilon/3$$

がわかる。最後に、上で取ったように  $\varepsilon > 0$  に対して  $N$  を取り、 $k \geq N$  のときを考える。 $x_k(\cdot)$  は連続なので、任意の  $t \in I$  に対してある  $\delta > 0$  が存在して、 $s \in I$ 、 $|s - t| \leq \delta$  ならば  $\|x_k(s) - x_k(t)\| < \varepsilon/3$  になる。するとそのような  $s$  に対して、

$$\|x(s) - x(t)\| \leq \|x(s) - x_k(s)\| + \|x_k(s) - x_k(t)\| + \|x_k(t) - x(t)\| < \varepsilon$$

となることがわかり、 $x(\cdot)$  は連続である。こうして  $x(\cdot) \in X$  と  $x_k(\cdot) \rightarrow x(\cdot)$  が同時に示された。 $X$  は確かに完備だったのである。

今度は  $F : X \rightarrow X$  であることを示そう。実際、 $x(\cdot) \in X$  であるとすれば、

$$\begin{aligned} \|F(x(\cdot))(t) - x^*\| &= \left\| \int_{t^*}^t f(s, x(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_{t^*}^t \|f(s, x(s))\| ds \\ &\leq |t - t^*| M \\ &\leq \delta M = \varepsilon \end{aligned}$$

---

\*<sup>3</sup> 閉集合であることは簡単に示せる。三角不等式を用いよ。

となるので、 $F(x(\cdot)) \in X$  がわかる。

次に先ほど述べたように、作用素  $F$  に対して  $F^1 = F$  とし、 $F^k$  まで定義されたときに  $F^{k+1}(x(\cdot)) = F(F^k(x(\cdot)))$  という形で帰納的に作用素  $F^{k+1}$  を定義する。上で示したことから、 $F^k : X \rightarrow X$  である。次に  $x(\cdot), y(\cdot) \in X$  をふたつ取り、 $F^k(x(\cdot))(t) = x^k(t), F^k(y(\cdot))(t) = y^k(t)$  と略記しよう。すると、

$$\begin{aligned} \|y^1(t) - x^1(t)\| &= \left\| \int_{t^*}^t [f(s, y(s)) - f(s, x(s))] ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t^*}^t \|f(s, y(s)) - f(s, x(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t^*}^t L \|y(s) - x(s)\| ds \right| \\ &\leq L|t - t^*| \rho(x(\cdot), y(\cdot)) \end{aligned}$$

であることがわかり、よって

$$\begin{aligned} \|y^2(t) - x^2(t)\| &= \left\| \int_{t^*}^t [f(s, y^1(s)) - f(s, x^1(s))] ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t^*}^t \|f(s, y^1(s)) - f(s, x^1(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t^*}^t L \|y^1(s) - x^1(s)\| ds \right| \\ &\leq \frac{L^2}{2} |t - t^*|^2 \rho(x(\cdot), y(\cdot)) \end{aligned}$$

となる\*4。以下帰納的に

$$\|y^k(t) - x^k(t)\| \leq \frac{L^k}{k!} |t - t^*|^k \rho(x(\cdot), y(\cdot)) \leq \frac{L^k \delta^k}{k!} \rho(x(\cdot), y(\cdot))$$

がわかる。左辺を  $t$  について最大値を取れば、

$$\rho(F^k(y(\cdot)), F^k(x(\cdot))) \leq \frac{L^k \delta^k}{k!} \rho(y(\cdot), x(\cdot))$$

---

\*4 ところで、公式

$$\left\| \int_{t^*}^t f(s) ds \right\| \leq \int_{t^*}^t \|f(s)\| ds$$

を受講者諸君は知っているだろうか？ 講師はこれの簡単な証明法を知らない。一応、リーマン和の定義に戻って示せばそれほど難しくないのだが、リーマン和が出てくる時点でなんとなく面倒くさい。もし簡単な証明を知っている受講者がいれば教えていただきたいところである。

である。一方で

$$\frac{L^k \delta^k}{k!} \rightarrow 0 \quad (\text{as } k \rightarrow \infty)$$

であることは、これが  $e^{L\delta}$  のマクローリン展開の第  $k$  項であることを考えれば明らかである。よって十分大きな  $k$  について  $F^k$  は縮小写像であり、縮小写像の不動点定理により、

$$F^k(x^*(\cdot)) = x^*(\cdot)$$

となる関数  $x^*$  の存在がわかった。

後は、これが  $F$  の不動点でもあることを示せばよい。まず、 $z(\cdot) = F(x^*(\cdot))$  とし、また  $z^m(\cdot) = F^m(x^*(\cdot))$  とすると、縮小写像の不動点定理から、関数列  $(z^{\ell k}(\cdot))_{\ell}$  も  $(z^{\ell k+1}(\cdot))_{\ell}$  も両方とも  $x^*(\cdot)$  に収束する。一方で

$$\begin{aligned} 0 \leq \|z^{\ell k+1}(t) - F(x^*(\cdot))(t)\| &\leq \left| \int_{t^*}^t \|f(s, z^{\ell k}(s)) - f(s, x^*(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t^*}^t L \|z^{\ell k}(s) - x^*(s)\| ds \right| \\ &\leq L\delta \rho(z^{\ell k}(\cdot), x^*(\cdot)) \rightarrow 0 \quad (\text{as } \ell \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

であり、右辺は  $t$  に依存していないため、

$$\rho(z^{\ell k+1}(\cdot), F(x^*(\cdot))(\cdot)) \rightarrow 0 \quad (\text{as } \ell \rightarrow \infty)$$

がわかる。よって  $(z^{\ell k+1}(\cdot))_{\ell}$  は  $x^*(\cdot)$  にも  $F(x^*(\cdot))$  にも収束しているため、 $x^*(\cdot) = F(x^*(\cdot))$  であり、関数  $x^*(\cdot)$  は (1) の解である。

$I$  上で定義された解が  $X$  内にひとつしかないことは、 $y(\cdot)$  が  $F$  の不動点であれば、それは  $F^k$  の不動点でもあることから容易にわかる。しかしまだ、 $X$  の外側の関数には他の不動点があるかもしれない、という疑いが残る。そこで仮に  $y^*(\cdot)$  が  $F$  の不動点であったとしよう。このとき、もし  $y^*(\cdot) \notin X$  であるとすれば、 $\|y^*(t) - x^*\| > \varepsilon$  となる  $t$  が存在しなければならない。すると中間値の定理から  $\|y^*(s) - x^*\| = \varepsilon$  となる  $s$  が  $t^*$  と  $t$  の間に必ず存在する。そのような  $s$  の集合は閉なので、最も  $t^*$  に近い値を  $s^*$  とすれば、

$$\|y^*(s^*) - x^*\| \leq \left| \int_{t^*}^{s^*} \|f(s, y^*(s))\| ds \right| \leq M |s^* - t^*| < \varepsilon$$

となってしまう、矛盾が生じる。故に  $y^*(\cdot) \in X$  がわかり、よって  $y^*(\cdot) = x^*(\cdot)$  で、 $I$  上で定義された解はひとつしかないことがわかった。



最後に、区間  $I_j$  上で定義された問題の解  $x_1, x_2$  が存在していたとしよう。  $I = I_1 \cap I_2$  とする。  $I$  は区間の共通部分なので区間であり、よって連結である。そこで、  $A = \{t \in I \mid x_1(t) = x_2(t)\}$  と定義し、この  $A$  が非空、開、閉であることが示せれば、  $A = I$  しかあり得ないことがわかり、したがってすべての  $t \in I$  について  $x_1(t) = x_2(t)$  であることがわかって、証明が完成する。

$A$  が非空であることは、  $x_1(t^*) = x_2(t^*) = x^*$  であることからただちにわかる。

$A$  が閉であることは、  $x_1$  と  $x_2$  の連続性から容易に示せる。

$A$  が開であることは、  $t^+ \in A$  としたときに、問題

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t^+) = x_1(t^+) = x_2(t^+)$$

を考えれば、これは第一種の問題であるから、  $t^+$  を内部に含むある区間  $I^+$  上で一意的な解が存在する。ところが  $x_1$  も  $x_2$  も  $t^+$  の近くで定義された開だから、  $I^+ \cap I$  上では  $x_1(t) = x_2(t)$  が成り立たなければならない。よって  $A$  は開である。以上ですべての証明が完成した。 ■

#### ・シャウダーの不動点定理

第一種の問題と異なり、第二種の問題では根本的に違う不動点定理を用いなければならない。使うのはシャウダーの不動点定理であり、ブラウワーの不動点定理の多様な同値変形のひとつとして知られている。

**定理 3** (シャウダーの不動点定理) :  $K$  は線形ノルム空間の凸コンパクト部分集合で、  $f : K \rightarrow K$  は連続であるとする。このとき  $f$  は  $K$  内に少なくともひとつの不動点を持つ。

また線形ノルム空間とか凸コンパクト集合とかいうやっかいな用語が追加されてしまった。これを説明するのは骨なので、今回は線形ノルム空間という言葉は説明しないことにしよう。区間  $I$  上で定義された連続関数の空間  $C(I, \mathbb{R}^n)$  が線形ノルム空間であるという事実さえ知っておけば十分である。

ある集合  $K$  が凸 (convex) であるとは、  $x, y \in K$  かつ  $t \in [0, 1]$  であるときに必ず  $(1-t)x + ty \in K$  であることを指す。コンパクト集合の定義は前章で述べた。今回考えたい空間  $C(I, \mathbb{R}^n)$  ならばアスコリ=アルゼラの定理が使って、その部分集合がコンパクトであることは、閉であり、かつ一様有界で同程度連続であることと同値である。

なお、シャウダーの不動点定理の証明はしない。この定理の証明は必然的にブラウワー

の不動点定理を経由せざるを得ないが、その難易度はずいぶん高く、これ以降使う頻度を考えると、あまり生産的でもないのである。

・ 第二種の問題の解の存在

定理 4 (第二種の問題の解の存在) : 次の問題

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t^*) = x^*$$

を考え、ただし  $f$  は  $\mathbb{R}^{n+1}$  の開集合  $U$  上で定義された連続関数であるとする。このとき、 $t^*$  を内部に含むある区間上で定義された解が存在する。

証明 : まず定理 2 と同様に区間  $I$  と空間  $X$  を作る。ただ  $X$  を作る際の  $\varepsilon$  の取り方は、 $|t - t^*| \leq \varepsilon$  と  $\|x - x^*\| \leq \varepsilon$  を満たしていれば常に  $(t, x)$  が  $f$  の定義域に属するようにさえ取ればよい。そして、この  $\varepsilon$  に対して、

$$M = 1 + \max_{(t,x): |t-t^*| \leq \varepsilon, \|x-x^*\| \leq \varepsilon} \|f(t, x)\|$$

とし、前と同様に

$$\delta = \varepsilon/M$$

という風に定義して、 $I$  と  $X$  を作る。そして  $K$  は、 $X$  の部分集合で、 $x(t^*) = x^*$  と、次の条件

$$\|x(t) - x(s)\| \leq M|t - s|$$

をすべての  $t, s \in I$  について満たすような関数  $x(\cdot)$  の集合とする。これが  $X$  の閉凸部分集合で、さらにアスコリ=アルゼラの定理の条件を満たすことは簡単に確認できる。また  $x(\cdot) \in K$  ならば  $F(x(\cdot)) \in K$  であることも簡単に示せるので、シャウダーの不動点定理が使えて、 $F$  は不動点を持つ。 ■

駆け足であったが、この形で第二種の問題を扱うことは、第一種との対比をわかりやすくする。第二種の問題は、使う不動点定理が縮小写像の不動点定理ではなくシャウダーの不動点定理である。そしてシャウダーの不動点定理には一意性を保証する条件がなにもないので、我々は第二種の問題では解の一意性を証明できないのである。

・ 応用 : 陰関数定理

さて、解の存在定理の簡単な応用として、特別な場合の陰関数定理の証明を示してみよう。まず、主張を見てみよう。

**定理5 (陰関数定理)** :  $f$  は  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  の開集合  $U$  上で定義され、 $\mathbb{R}^n$  に値を取る連続微分可能な関数で、偏微分行列  $D_y f(x, y)$  は  $(x^*, y^*)$  で正則であるとする。このとき、 $x^*$  を内部に含む立方体  $I_1$  と、 $y^*$  を内部に含む立方体  $I_2$ 、そして連続微分可能な関数  $y : I_1 \rightarrow I_2$  が存在して、 $(x, y) \in I_1 \times I_2$  に対して  $f(x, y) = f(x^*, y^*)$  と  $y = y(x)$  が同値になる\*5。

この定理は、証明がえらく面倒であることで有名である。しかし実のところ、 $m = n = 1$  の場合には、第二種の問題の解の存在定理から簡単に証明ができてしまうのである。以下にそれを示そう。まず、仮定から  $D_y f(x^*, y^*) \neq 0$  であるので、一般性を失うことなく  $D_y f(x^*, y^*) > 0$  であることにしよう。そして、 $\varepsilon > 0$  を十分小さく取って、 $|x - x^*| \leq \varepsilon$  かつ  $|y - y^*| \leq \varepsilon$  であれば、 $D_y f(x, y) > 0$  であるとなるようにしておき、 $I_0 = [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$  と、 $I_2 = [y^* - \varepsilon, y^* + \varepsilon]$  とする。考えるのは次の微分方程式である：

$$\dot{y} = -\frac{D_x f(x, y)}{D_y f(x, y)}, \quad y(x^*) = y^*.$$

ただしいままでは微分方程式の変数は  $t$  だったが、ここでは  $x$  を取っていると仮定する。この問題は第二種の問題なので、 $x^*$  を内部に含むある区間  $I_1 \subset I_0$  上で定義された解  $y(\cdot)$  が存在する\*6。このとき、 $I_1$  上で

$$\frac{d}{dx} f(x, y(x)) = D_x f(x, y(x)) + D_y f(x, y(x))y'(x) = 0$$

であるため、 $f(x, y(x)) = f(x^*, y^*)$  が常に成り立つ。一方で、 $I_1 \times I_2$  上で  $D_y f(x, y) > 0$  なので、 $f$  は  $y$  について増加的であり、よって  $(x, y) \in I_1 \times I_2$  のとき、 $y > y(x)$  ならば  $f(x, y) > f(x, y(x)) = f(x^*, y^*)$  であり、また  $y < y(x)$  ならば  $f(x, y) < f(x, y(x)) = f(x^*, y^*)$  である。こうして証明が完成した。 ■

\*5 わかると思うが、偏微分行列

$$D_y f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x, y) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(x, y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(x, y) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(x, y) \end{pmatrix}$$

である。

\*6 ちなみに、 $M = 1 + \max_{(x, y) \in I_0 \times I_2} \left| \frac{D_x f(x, y)}{D_y f(x, y)} \right|$  として  $\delta = \varepsilon/M$  とすれば、 $I_1 = [x^* - \delta, x^* + \delta]$  として取れる。前節の証明を見よ。

・陰関数定理の証明：一般の場合

一般の場合の陰関数定理の証明はとても難しいが、第二種の解の存在定理によって、少しだけ楽になる。証明の方法には次元についての帰納法で行う方法と縮小写像の不動点定理を用いる方法があるが、後者は作用素ノルムの一般的な性質についての議論を必要とし、面倒くさい。よって  $n$  についての帰納法を採用することにする。

まず  $n = 1$  の場合について。また先ほどと同様に  $D_y f(x^*, y^*) > 0$  のときだけを扱う。十分  $\varepsilon > 0$  を小さく取ること、 $i = 1, \dots, m$  について  $|x_i - x_i^*| \leq \varepsilon$  かつ  $|y - y^*| \leq \varepsilon$  であれば必ず、 $D_y f(x, y) > 0$  であるようにできる。したがって  $f$  はこの範囲で  $y$  の増加関数である。さらに、 $y_1 = y^* + \varepsilon, y_2 = y^* - \varepsilon$  とすれば、 $f(x^*, y_1) > f(x^*, y^*) > f(x^*, y_2)$  で、 $f$  は連続であるから、 $\varepsilon$  よりさらに小さく  $\delta > 0$  を取れば、 $i = 1, \dots, m$  に対して  $|x_i - x_i^*| \leq \delta$  であれば常に  $f(x, y_1) > f(x^*, y^*) > f(x, y_2)$  であるようにできる。したがってこのような  $x$  については中間値の定理によって  $f(x, y(x)) = f(x^*, y^*)$  となるような点  $y(x)$  が  $y_1$  と  $y_2$  の間にあるが、 $f$  は  $y$  について増加的なのだから、そのような  $y(x)$  はただひとつしかない。よって  $I_1 = \prod_{i=1}^m [x_i^* - \delta, x_i^* + \delta]$  かつ  $I_2 = [y^* - \varepsilon, y^* + \varepsilon]$  とし、 $(x, y) \in I_1 \times I_2$  に対して  $f(x, y) = f(x^*, y^*)$  と  $y = y(x)$  が同値になるような関数  $y(x)$  の存在が示せた。

後はこの  $y(x)$  が連続微分可能であることを示せば  $n = 1$  のときの証明は終わる。連続性から示そう。いま  $I_1$  内の点列  $(x_k)$  が  $x \in I_1$  に収束しているとしよう、このとき  $(y(x_k))$  は  $I_2$  内の数列である。この数列が  $y(x)$  に収束していないとすれば、ある  $z \neq y(x)$  への収束部分列が存在する。最初から点列を取り直して  $y(x_k)$  は  $z$  に収束しているとしよう。このとき  $f$  の連続性から  $f(x, z) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k, y(x_k)) = f(x^*, y^*)$  であり、よって  $z = y(x)$  となるが仮定に矛盾。よってこのようなことはあり得ず、 $y$  は連続である。

$y$  が連続微分可能であることを証明するには、偏導関数  $D_{x_i} y$  がすべての  $x \in I_1$  で定義できて連続であることを示せば十分である。そこで次の第二種の問題

$$\dot{z}(t) = -\frac{D_{x_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_m, z(t))}{D_y f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_m, z(t))}, \quad z(x_i) = y(x)$$

を考えよう。すでに示したように、この問題は  $x_i$  を内部に含むある区間  $I$  上で解を持つ。一方で関数

$$\phi(t) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_m, z(t))$$

を  $t$  で微分すると、

$$D_{x_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_m, z(t)) + D_y f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_m, z(t)) \dot{z}(t) = 0$$

となる。よって  $\phi$  は定数関数であり、したがって

$$\phi(t) \equiv \phi(x_i) = f(x, y(x)) = f(x^*, y^*)$$

で、故に  $t \in I$  かつ  $|t - x_i^*| \leq \delta$  ならば

$$z(t) = y(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_m)$$

が成り立つことがわかる。 $z$  は微分可能だから  $y$  は  $x_i$  の点で  $x_i$  について偏微分可能で、

$$D_{x_i} y(x) = \dot{z}(x_i) = -\frac{D_{x_i} f(x, y(x))}{D_y f(x, y(x))}$$

であるが、 $y$  の連続性をすでに証明しているので右辺は連続であり、したがって偏導関数  $D_{x_i} y$  は連続である。これで  $n = 1$  の場合が終わった。

次に  $n = k - 1$  まで証明ができたと仮定して、 $n = k$  の場合の証明を行う。 $D_y f(x^*, y^*)$  は正則なので、 $k$  行目は 0 ベクトルではない。そこで必要ならば  $y$  の座標を取り替えて、 $D_{y_k} f_k(x^*, y^*) \neq 0$  と仮定してよい。そこで先ほど証明した  $n = 1$  の場合の陰関数定理を適用して、 $I_1 = \prod_{i=1}^m [x_i^* - \delta, x_i^* + \delta] \times \prod_{j=1}^{k-1} [y_j^* - \delta, y_j^* + \delta]$  から  $I_2 = [y_k^* - \varepsilon, y_k^* + \varepsilon]$  への関数  $y_k(x, y_1, \dots, y_{k-1})$  を得る。この関数は連続微分可能で、 $(x, y) \in I_1 \times I_2$  に対して  $f_k(x, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k) = f_k(x^*, y^*)$  と  $y_k = y_k(x, y_1, \dots, y_{k-1})$  が同値であるという特徴を持つ。そこで  $(y_1, \dots, y_{k-1})$  を  $\hat{y}$  と書くことにし、 $i = 1, \dots, k - 1$  に対して

$$F_i(x, \hat{y}) = f_i(x, \hat{y}, y_k(x, \hat{y}))$$

と定義することにしよう。もし

$$D_{\hat{y}} F(x^*, \hat{y}^*) \tag{3}$$

が正則であれば、これに  $n = k - 1$  のときの陰関数定理を用いて  $\hat{y}(x)$  を得て、 $i = 1, \dots, k - 1$  に対して  $y_i(x) = \hat{y}_i(x)$  とし、 $y_k(x) = y_k(x, \hat{y}(x))$  とすれば、これがすべての条件を満たすことは容易に確認できる。したがって後は (3) を確認するだけでよい。実際のところ、

$$\det(D_{\hat{y}} F(x^*, \hat{y}^*)) = \frac{1}{D_{y_k} f_k(x^*, y^*)} \det(D_y f(x^*, y^*)) \neq 0$$

であることは、行列式の計算規則を用いてそれほど難しくなく計算できるので、受講者への演習として残しておく。以上で証明が完成した。 ■

・ 練習問題

問題 1 : 第二種の問題で述べた  $K$  が一様有界かつ同程度連続であることを示せ。

問題 2 :  $f$  が  $\mathbb{R}^{n+1}$  上で定義された連続微分可能な関数であるとき、問題

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t^*) = x^*$$

が第一種の問題であることを確認せよ。